МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ОРДЕНА «ЗНАК ПОЧЕТА»
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математическая обработка результатов измерений в лабораториях физического практикума

Учебно-методическая разработка

ЕКАТЕРИНБУРГ 1993

Марков Ю.Н., Кузин С.Н. Математическая обработка результатов измерений в лабораториях физического практикума: Учебно-методическая разработка / Урал. пед. ин-т; Сост. Ю.Н.Марков, С.Н.Кузин. Екатеринбург, 1993. 35 с.

Описана методика оценки случайных и систематических погрешностей результатов измерений физических величин в лабораториях физического практикума. Приводится расчет погрешностей на примере конкретной лабораторной работы.

Предназначается для студентов физического и математического факультетов; может быть использована студентами технических вузов.

Рецензент канд. физ.-мат.наук, доц. Довгопол С.П.

Редактор И.М.Леушина

Подписано к печати 8.02.93. Формат 60 x 84 1/16
Бумага для множит. аппаратов. Усл. печ. л. 2,1.
Уч. - изд. л. 2,1. Тираж 500. Заказ 718 Цена 30 р.
Уральский ордена "Знак Почета" государственный педагогический институт.
Лаборатория множительных аппаратов.
620219 Екатеринбург, ГСП 135, просп.Космонавтов, 26.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

X - случайная величина (ее обозначение);
x_0 - истинное значение физической величины;
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - числовые значения случайной величины X;
n - число наблюдений (измерений) случайной величины;
$\langle x \rangle$ - среднее арифметическое значение величины;
P - вероятность события;
S - выборочное среднеквадратическое отклонение;
$S_{\langle x \rangle}$ - среднеквадратическое отклонение значения $\langle x \rangle$ от значения x_0;
$t_{P,n}$ - коэффициент Стьюдента;
ε - доверительная граница случайной погрешности результата измерения;
θ - доверительная граница неисключенной систематической погрешности результата измерения;
Δ_x - доверительная граница абсолютной погрешности результата измерения величины;
γ - доверительная граница относительной погрешности результата измерения.

I. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ПОГРЕШНОСТИ

Измерением называется нахождение числового значения физической величины с помощью специальных технических средств (приборов) или с помощью соотношений, выражающих определенные физические закономерности. По способу получения значения измеряемой величины измерения подразделяются на прямые и косвенные. Прямым называется измерение, при котором искомое значение величины получается непосредственно из опытных данных путем считывания результата измерения со шкалы показаний прибора. Например, прямыми являются измерения массы с помощью весов, длины с помощью линейки и т.д. Косвенным называется измерение, при котором искомое значение величины устанавливается на основе известной аналитической зависимости между этой величиной и величинами, значения которых определяются в результате прямых измерений. Так, при определении плотности тела правильной геометрической формы проводятся прямые измерения его массы и линейных размеров, а затем уже рассчитывается по формуле плотность.

Для тела цилиндрической формы формула расчета плотности имеет вид:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h},$$

где

m - масса тела цилиндрической формы; d - диаметр; h - высота цилиндра. Значения величин m, d и h определяются при выполнении прямых измерений.

В силу ряда причин результат измерения любой физической величины отличается от ее истинного значения x_0. Отклонение результата измерения от истинного значения характеризуется погрешностью измерения. По форме представления различают абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность - это разность между измеренным и истинным значением измеряемой величины:

$$\Delta_x = x - x_0, \qquad (I)$$

где x - измеренное значение величины;
x_0 - истинное значение величины;
Δ_x - абсолютная погрешность результата измерения величины X.

Относительная погрешность (γ) - отношение абсолютной погрешности результата измерения к истинному значению величины.

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_0}. \quad \text{Или в \%:} \quad \gamma = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%. \qquad (2)$$

Относительная погрешность показывает, какую часть от истинного значения величины составляет абсолютная погрешность; именно γ характеризует точность измерения величины X, т.е. является оценкой качества измерения.

По характеру измерений при выполнении повторных измерений погрешности подразделяются на случайные и систематические. Систематическая погрешность, будучи частью всей погрешности (т.е. составляющей погрешности), остается постоянной или закономерно меняющейся при повторных измерениях; она связана с несовершенством технических средств измерения, т.е. с несовершенством используемой измерительной техники. Случайная погрешность - это та составляющая погрешности, которая изменяется случайным, непредсказуемым образом при повторных измерениях данной величины. От опыта к опыту эта погрешность изменяет не только свое численное значение, но также и знак. Случайная погрешность обусловлена факторами, действующими неодинаково, непредсказуемо при повторении опытов по измерению данной величины. Такими факторами могут быть вибрации, люфты осей приборов по мере износа деталей измерительных приборов, запыленность помещений и т.д. Например, на результатах повторных измерений линейных размеров объекта может сказываться разное качество обработки поверхности, выявляемое при наблюдении ее рельефа с помощью микроскопа.

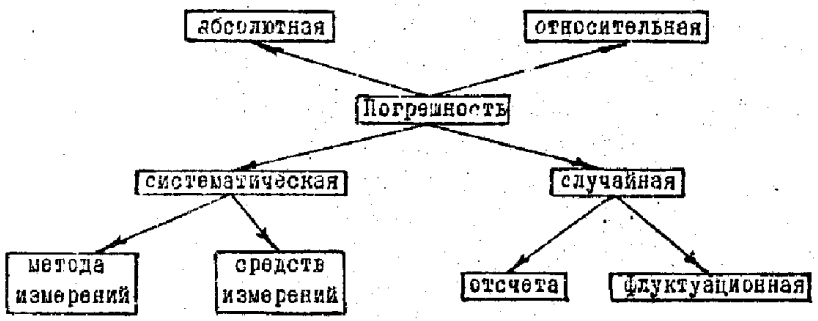
Сила тока в слаботочных устройствах может случайным образом изменяться, отклоняясь от постоянного значения (подвергаться флуктуациям).

По причинам возникновения различаются погрешности следующих видов:

- метода измерений, т.е. обусловленных несовершенством выбранной методики измерений;
- средств измерений, связанных с неизбежными техническими недостатками измерительных приборов;
- отсчета, вызванных округлением значений результатов показаний измерительных приборов;

- флуктуаций, обусловленных колебаниями (флуктуациями) значений самой измеряемой величины.

В целях удобства можно представить следующую схему классификации погрешностей



Случайные погрешности проявляются в том, что при многократных измерениях некоторой физической величины X одним и тем же измерительным прибором при неизменных условиях значения результатов измерений будут несколько отличаться друг от друга, образуя набор случайных чисел: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$.

Заметим, что если полученные значения одинаковы, то это свидетельствует о том, что систематическая погрешность превосходит случайную, которая, следовательно, не может быть обнаружена используемым измерительным прибором.

Наиболее близким к истинному значению x_0 является среднее арифметическое этих значений:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Это легко объяснить тем, что некоторые значения величины X завышены (погрешность положительная), другие же занижены (погрешность отрицательная); при суммировании эти погрешности частично компенсируются, поэтому среднее арифметическое является <u>наилучшей оценкой</u> значения измеряемой величины X.

Наиболее же достоверным значением величины X является <u>среднее статистическое</u>, получаемое как предел значения $\langle x \rangle$ при неограниченном возрастании числа измерений n $(n \to \infty)$

$$\lim_{n \to \infty} \langle x \rangle = x_0 \qquad (4)$$

Среднее статистическое x_0 принимается за истинное значение величины X. Сама величина X в теории вероятностей называется <u>случайной величиной</u>. Это связано с тем, что ее числовые значения, как уже отмечалось, представляют собой набор случайных чисел, некоторые из которых больше, а другие меньше x_0.

Практически почти всегда приходится ограничиваться конечным числом измерений (в лабораторном практикуме 3–5 раз). При этом среднее арифметическое значение $\langle x \rangle$, отклоняясь от истинного значения, может быть как больше, так и меньше x_0, которое остается неизвестным. В связи с этим встает задача по определению отклонения значения $\langle x \rangle$ от x_0. Разницу их значений в соответствии с равенством (I) нужно квалифицировать как случайную абсолютную погрешность значения $\langle x \rangle$:

$$\Delta_{\langle x \rangle} = \langle x \rangle - x_0 \qquad (5)$$

Оценка случайной погрешности производится на основе методов математической статистики*, оперирующей понятиями и теоремами теории вероятностей.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим некоторые понятия теории вероятностей на примере измерения длины тела. Пусть произведено измерение длины тела (L) n раз. Числовые значения отдельных результатов измерения l_1, $l_2, l_3 \ldots l_n$ будут разбросаны относительно истинного значения l_0. По терминологии теории вероятностей длину тела L следует называть <u>непрерывной</u> случайной величиной. Это связано с тем, что при многократном измерении длины L ее числовые значения $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$, обозначенные на числовой оси штрихами (рис. I), будут непрерывно заполнять некоторый конечный интервал (b, c), взятый для наглядности достаточно протяженным от наименьшего значения (b) до наибольшего значения (c).

* Происходит от английского слова; означает количественный учет массовых случайных явлений.

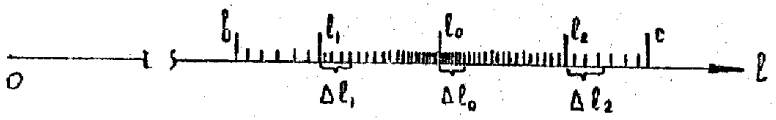


Рис. I

Возьмем интервал значений длины тела длиной $\Delta\ell_1$, примыкающий к некоторому значению ℓ_1 (рис. I). Число случаев попадания значений длины L в этот интервал обозначим Δn_1. Отношение $\Delta n_1/n = \omega_1$ называется относительной частотой (ω_1) попадания результатов измерений в интервал значений от ℓ_1 до $\ell_1 + \Delta\ell_1$.

При неограниченно большом значении числа всех измерений n $(n \to \infty)$ отношение $\Delta n_1/n$ характеризует вероятность (P) того, что результат единичного измерения длины попадает в выделенный интервал значений L длиной $\Delta\ell_1$. В теории вероятностей этому соответствует запись:

$$P(\ell_1 < \ell < \ell_1 + \Delta\ell_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta n_1}{n} = P_1 . \quad (6)$$

Т.е. вероятность P данного события (попадания в данный интервал значений L) представляет собой предельное значение относительной частоты при $n \to \infty$.

Аналогично выражается вероятность попадания значений величины L в другой интервал значений ($\Delta\ell_2$), примыкающий к другому значению (ℓ_2).

При одинаковой ширине интервалов ($\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell_3 = \ldots = \Delta\ell_n$) относительные частоты и вероятности попадания значений L в эти интервалы (т.е. вероятности различных событий) будут различными, зависящими от самих значений $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \ldots \ell_n$. Очевидно, что частота и вероятность попадания значений L будет наибольшей для интервала, примыкающего к значению ℓ_0 (рис. I), так как получаемые при измерении значения длины тела будут группироваться около значения ℓ_0.

Будем рассматривать отношения вида:

$$\frac{P(\ell_1 < \ell < \ell_1 + \Delta\ell_1)}{\Delta\ell_1} = \frac{\Delta P_1}{\Delta\ell_1} ,$$

$$\frac{P(\ell_2 < \ell < \ell_2 + \Delta\ell_2)}{\Delta\ell_2} = \frac{\Delta P_2}{\Delta\ell_2} .$$

В общем виде:

$$\frac{P(\ell_i < \ell < \ell_i + \Delta\ell)}{\Delta\ell} = \frac{\Delta P}{\Delta\ell} .$$

Каждое из этих отношений характеризует значение вероятности, приходящееся в среднем уже на единицу длины рассматриваемых интервалов ($\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$, $\Delta\ell$). Как и само значение вероятности P, это отношение зависит от значения ℓ, т.е. является функцией значения ℓ.

Будем рассматривать элементарный интервал (т.е. $\Delta\ell \to 0$), когда выполняется соотношение $\Delta\ell = d\ell$. Вероятность попадания значений L в интервал элементарной длины будем соответственно обозначать dP (часто dP называют дифференциалом вероятности):

$$P(\ell_i < \ell < \ell_i + d\ell) = dP . \quad (7)$$

Тогда отношение $dP/d\ell$ представляет собой некоторую функцию

$$f(\ell) = \frac{dP}{d\ell} . \quad (8)$$

Функция $f(\ell)$ называется плотностью распределения вероятности для случайной величины L. Такое название можно объяснить тем, что в физике аналогом этой величины является плотность вещества ρ, определяемая по формуле, схожей по виду с соотношением (8):

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} , \quad (9)$$

где dV - элементарный объем, взятый в окрестности данной точки вещества, а dm - масса вещества в этом элементарном объеме. Значение массы dm можно вычислить на основе соотношения (9):

$$dm = \rho\, dV . \quad (10)$$

Аналогично вычисляется dP, т.е. вероятность попадания значения L в элементарный интервал значений, взятый в окрестности какого-либо значения ℓ:

$$dP = f(\ell)\, d\ell . \quad (11)$$

Понятно, что в общем случае можно говорить о любой другой непрерывной случайной величине X. Соответственно вероятность попадания ее значений в интервал элементарной длины dx будет равна:

$$dP = (x < X < x + dx) = f(x)\,dx \quad , \qquad (12)$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятности случайной величины X (часто просто плотность вероятности).

3. КРИВАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

График плотности распределения вероятностей называется <u>кривой распределения вероятностей</u>. Пусть для некоторой зависимости $f(x)$ график имеет вид, представленный на рис. 2.

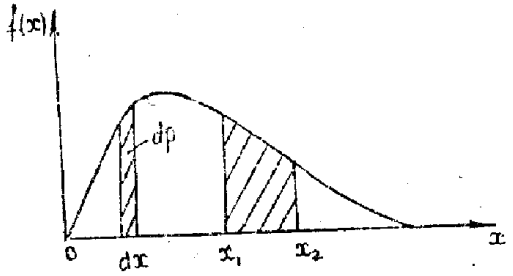


Рис. 2

Нетрудно увидеть, что элементарное значение вероятности dP, выражаемое соотношением (12), численно равно площади заштрихованной узкой полоски (рис. 2). Вероятность же попадания значений величины X в интервал конечной длины (x_1 , x_2) равна площади заштрихованной криволинейной трапеции, которая складывается из множества площадей таких полосок, если весь интервал (x_1, x_2) разбить на множество интервалов с длиной dx для каждого из них.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Поскольку вероятность является величиной безразмерной, то площадь Q_1 криволинейной трапеции должна выражаться в <u>долях</u> от площади Q всей фигуры, расположенной под кривой распределения вероятностей. Имеет место следующее равенство:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{Q_1}{Q} \quad . \qquad (13)$$

Отношение значений площадей этих фигур можно легко определить следующим образом. Вырезав фигуру под всей кривой распределения вероятностей, взвесим эту бумажную фигуру на аналитических весах. Массу m можно выразить через плотность бумаги ρ и объем фигуры V: $m = \rho V = \rho Q h$, где Q – площадь фигуры; h – толщина бумажного листа, на котором был построен график зависимости $f(x)$.

Вырезая затем криволинейную трапецию с площадью поверхности Q_1, можно определить на весах массу m_1 этой части листа. Значение массы m_1 выражается аналогично: $m_1 = \rho Q_1 h$

Составив отношение m_1/m и сократив ρ и h, получим:

$$m_1/m = Q_1/Q = P(x_1 < x < x_2) \quad .$$

Так достаточно просто можно определить численное значение вероятности попадания значений величины X в заданный интервал ее значений.

2. Второе замечание касается так называемой <u>нормировки вероятности</u>.

Полный интервал всех возможных значений величины X, составляющий (x_1 , x_2), можно считать состоящим из большого числа (q) узких интервалов с длиной Δx_i (i – число интервалов, изменяющееся от 1 до некоторого значения q). Относительная частота попадания значений X в каждый из таких интервалов принимает значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_q$. Составив сумму этих частот, получим:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_q = \frac{\Delta n_1}{n} + \frac{\Delta n_2}{n} + \frac{\Delta n_3}{n} + \ldots + \frac{\Delta n_q}{n} = \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2 + \Delta n_3 + \ldots + \Delta n_q}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad . \qquad (14)$$

Сумма $\Delta n_1 + \Delta n_2 + \ldots + \Delta n_q$ равна числу всех наблюдений (измерений) n.

Переходя к пределу данной суммы частот, получим значения вероят-

ностей, а предел правой части равенства будет равен I, так как предел постоянной величины равен самой постоянной величине.

$$\lim_{n\to\infty}(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_q)=\lim\omega_1+$$

$$+\lim\omega_2+\ldots+\lim\omega_q=P_1+P_2+\ldots+P_q=1$$

$$\text{Или: } \sum_{i=1}^{q} P_i=1 \qquad (I5)$$

Суммы значений относительных частот и вероятностей всех событий (попаданий в указанные интервалы) равны I.

В случае интервалов элементарной длины ($\Delta x \to 0$, $\Delta x = dx$) вместо P_i будем иметь дифференциал вероятности dP, а сумма $\sum^{q} P_i$ преобразуется в определенный интеграл. Причем вероятность попадания значений X в интервал элементарной длины выражается согласно соотношению (I2). Итак, будем иметь:

$$P \to dp = f(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{q} P_i \to \int_{x_1}^{x_2} dp = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Выражение вида (I5) запишется так:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 1\,, \qquad (I6).$$

т.е. суммарная вероятность всех событий для непрерывной случайной величины равна I.

Данное выражение (I6) играет важную роль в теории вероятностей и называется условием нормировки функции $f(x)$.

Поскольку интеграл в равенстве (I6) численно равен площади под кривой распределения вероятностей, то эта площадь в соответствии с равенством (I6) принимается за единицу.

4. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Для разных непрерывных случайных величин аналитическое выражение плотности вероятности $f(x)$ оказывается различным. Очень часто при измерении физических величин (длина тела L, масса тела M и т.д.) их случайные значения распределяются относительно истинного значения в соответствии с законом <u>нормального распределения</u>, изученным Гауссом (распределение Гаусса).

Для плотности вероятности при этом распределении было получено следующее выражение:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad (I7)$$

где a и σ - параметры распределения; x - численное значение случайной величины X. Параметр a представляет собой истинное значение измеряемой величины ($a = x_0$). Параметр σ^2 называется <u>дисперсией распределения</u>, σ - <u>стандартным отклонением</u> или <u>стандартом</u>.

Смысл величины σ с большой наглядностью иллюстрируется при графическом изображении зависимости $f(x)$ (рис. 3).

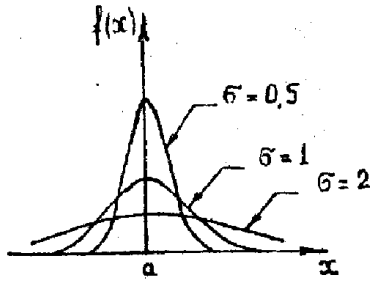


Рис. 3

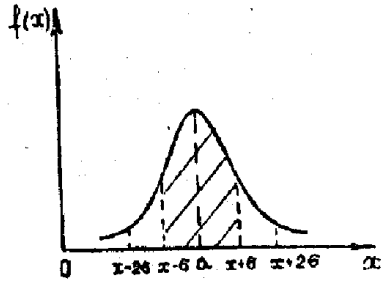


Рис. 4

Кривые, характеризующие зависимость $f(x)$, асимптотически приближаются к оси абсцисс, имея максимумы при $X = a$. Чем меньше параметр σ, тем больше значение максимума, а сама кривая вытягивается вдоль оси ординат, т.е. тем меньше разброс значений относительно истинного значения a.

Значение площади заштрихованной фигуры (рис. 4) составляет 0,6827. Следовательно, вероятность попадания каждого отдельного результата измерения величины X в интервал ($a-\sigma$, $a+\sigma$) равна 0,6827. Или (что то же самое) вероятность случайной погрешности измерения, модуль которой равен σ ($|x-a|=\sigma$), составляет 0,6827.

Вероятность "двухсигмовой" погрешности уже равна 0,9549, а "трехсигмовой" – 0,9975.

Вероятность попадания результатов измерений величины X в заданный интервал значений называется доверительной вероятностью или надежностью, а сам интервал – доверительным интервалом.

Таким образом, в случае измерения величины X значения $\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ характеризуют границу допускаемой при этом случайной погрешности и, во-вторых, позволяют определить доверительную вероятность, иначе надежность (α), этой границы.

5. ОЦЕНКА ГРАНИЦ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Поскольку в реальных условиях число измерений n ограничено, то из так называемой генеральной совокупности, т.е. бесконечно большого числа значений x_i, выбирается только некоторое конечное их число n (обычно 3–5). Как уже отмечалось, оценкой истинного значения величины X служит среднее арифметическое $\langle x \rangle$.

Эквивалентом (говорят чаще-оценкой) значения параметра σ является выборочное среднеквадратичное отклонение S_x, для которого в теории вероятности получена формула:

$$S_x = \sqrt{\frac{(x_1-\langle x\rangle)^2+(x_2-\langle x\rangle)^2+\ldots+(x_n-\langle x\rangle)^2}{n-1}} \quad . \qquad (18)$$

При этом S_x (как и σ) характеризует отклонение (или разброс) отдельных случайных значений ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) относительно самого значения $\langle x \rangle$, принимаемого за наиболее точное значение x_0 ($x_0 = a$). В теории вероятностей также показано, что отклонение среднего арифметического

$\langle x \rangle$ * от истинного значения x_0 меньше S_x и вычисляется по формуле:

$$S_{\langle x\rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \quad . \qquad (19)$$

Или:

$$S_{\langle x\rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x-\langle x\rangle)^2+\ldots+(x_n-\langle x\rangle)^2}{n(n-1)}} \quad . \qquad (20)$$

Как и для случая двухсигмового интервала, попаданию значений x в интервал ($\langle x\rangle - 2S_{\langle x\rangle}$, $\langle x\rangle + 2S_{\langle x\rangle}$) соответствует доверительная вероятность $\alpha = 0{,}9549$ (округленно $\alpha = 0{,}95$).

Таким образом, абсолютное значение случайной ошибки равно $2S_{\langle x\rangle}$ с весьма высокой доверительной вероятностью, равной 0,95.

Окончательный результат измерения величины (с учетом только случайной погрешности) записывается в виде:

$$x = \langle x\rangle \pm 2S_{\langle x\rangle} \quad . \qquad (21)$$
$$\alpha = 0{,}95$$

Значение $\pm 2S_{\langle x\rangle}$ выступает в роли максимально возможной случайной погрешности при $\alpha = 0{,}95$, т.е. характеризует границы отклонения $\langle x \rangle$ от истинного значения x_0.

При доверительной вероятности $\alpha = 0{,}6827$ значение границы погрешности характеризуется значением $\pm S_{\langle x\rangle}$, а при $\alpha = 0{,}9975$ граница погрешности составляет $\pm 3S_{\langle x\rangle}$ (как в случае "трехсигмового" интервала).

* Значение $\langle x \rangle$ получено как среднее арифметическое для данной серии значений величины X. Если же взять вторую, третью и т.д. серии значений величины X, то соответствующие им средние значения ($\langle x\rangle_1$, $\langle x\rangle_2$, $\langle x\rangle_3$, $\langle x\rangle_4$ и т.д) представляют собой тоже случайные значения величины X, нормально распределенные относительно x_0. Вот почему значение $S_{\langle x\rangle}$ характеризует разброс (отклонение) среднего значения относительно истинного значения x_0.

Заметим, что распределение результатов измерений (и их погрешностей) подчиняется нормальному распределению при значительном числе измерений n ($n \geqslant 30$). На практике же число измерений невелико ($n = 3 - 5$), в результате, например при $\alpha = 0{,}95$, максимальное значение случайной погрешности превосходит $2\,S_{\langle x\rangle}$.
В этих случаях вместо целочисленных значений коэффициентов при $S_{\langle x\rangle}$ в формуле вида (21) вводятся превышающие их числа, называемые коэффициентами Стьюдента в честь английского математика Госсета, опубликовавшего в 1908 году работу под псевдонимом "Стьюдент".
Не приводя полученного Стьюдентом аналитического выражения для распределения результатов измерений при ограниченном их числе, отметим, что кривая распределения Стьюдента при большом числе измерений совпадает с кривой распределения Гаусса, а при ограниченном значении n она более плавно приближается к оси абсцисс.
Коэффициенты Стьюдента, обозначаемые символом $t_{\alpha,n}$, приводятся в соответствующих таблицах; числовое значение $t_{\alpha,n}$ зависит от принятой доверительной вероятности α и числа измерений n.
В качестве примера часть таблицы приводится ниже.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{\alpha,n}$	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26

Значение границ случайной погрешности значения $\langle x\rangle$ оценивается по формуле:

$$\varepsilon = \pm\, t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x\rangle} \quad . \qquad (22)$$

Доверительная вероятность (называют также надежностью) обычно выбирается равной 0,95 ($\alpha = 0{,}95$).
Тогда результат измерения величины X с учетом только случайной погрешности записывается в виде:

$$x = \langle x\rangle \pm \varepsilon = \langle x\rangle \pm t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x\rangle} = \langle x\rangle \pm t_{\alpha,n}\frac{S_x}{n} \, . \qquad (23)$$

$\alpha = 0{,}95$.

<u>Пример</u>. В результате шести измерений длины тела L с помощью штангенциркуля (с точностью нониуса 0,05 мм) среднее значение длины $\langle \ell\rangle$ оказалось равным 125,57 мм, а среднеквадратичное отклонение $S_{\langle \ell\rangle}$ равно 0,27 мм.

Определить границы случайной погрешности данных измерений.
В таблице коэффициентов Стьюдента находим, что при $n = 6$ (горизонтальная строка) и $\alpha = 0{,}95$ (вертикальный столбец) коэффициент Стьюдента равен: $t_{\alpha,n} = 2{,}57$.
Для определения результата измерения воспользуемся соотношением вида (23):

$$\ell = 125{,}57 \pm 2{,}57\,\frac{0{,}27}{6} = (125{,}57 \pm 0{,}28)\ \text{мм} \ ,$$

$$\alpha = 0{,}95.$$

Случайная ошибка округляется до одной значащей цифры, результат записывается в виде:

$$\ell = (125{,}6 \pm 0{,}3)\ \text{мм}, \qquad \alpha = 0{,}95.$$

Это означает, что значение длины тела с вероятностью $\alpha = 0{,}95$ находится между значениями 125,3 и 125,9 мм.
ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (19) выражает фундаментальный закон возрастания точности результата измерения. Как видим, при большом числе измерений n значение $S_{\langle x\rangle}$ может быть сведено к минимальному значению, близкому к нулевому (в пределах точности используемых измерительных приборов). Тогда и случайная погрешность окажется незначительной, как это следует из равенства (23).
Таким образом, имеется принципиальная возможность повышения точности результата измерения значения $\langle x\rangle$: путем многократных измерений величины X случайную погрешность можно свести буквально к нулю. Хотя этот метод повышения точности результата измерения широко используется (особенно в радиотехнике при измерении слабых электрических сигналов, т.е. токов), однако он сопряжен со многими, часто непреодолимыми трудностями.

6. ОЦЕНКА ГРАНИЦ НЕИСКЛЮЧЕННОЙ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Как уже отмечалось, систематические погрешности обусловлены факторами, действующими одинаковым или закономерным образом при многократных измерениях величины X .
В некоторых случаях модуль и знак систематической погрешности известны. Такие погрешности, называемые <u>поправками</u>, могут быть исключены при оценке результата измерения. Так, если часы отстают на 1 секунду в течение часа, то к их показаниям необходимо добавлять 1 с на каждый час времени.

Если стрелка электроизмерительного прибора (амперметра, вольтметра и т.д.) устанавливается на шкале не точно против нулевой отметки при отсутствии тока, то при измерении ток следует пропустить вначале в одном направлении, а затем в обратном. Тогда в одном случае показание будет завышено, а в другом – занижено на одно и то же значение. Если взять полусумму этих двух значений, то результат не будет содержать систематической погрешности (поправки). Понятно, что в этом случае необходимо использовать электроизмерительный прибор с нулевой отметкой (нулем) в центре шкалы.

Однако имеются систематические погрешности, модуль и знак которых неизвестны. Такие погрешности, называемые <u>неисключенными</u>, задаются как предельные значения основной систематической погрешности средств измерения ($Q_{осн.}$), часто их значение приводится в паспорте измерительного прибора. Например, если в паспорте микрометра указано значение погрешности ± 0,004 мм, то это означает, что $Q_{осн.}$ не превышает значения 0,004 мм, т.е. $Q_{осн.}=\pm 0{,}004$ мм.

Для электроизмерительных приборов предел основной систематической погрешности задается <u>классом точности</u>. По степени точности, согласно ГОСТу, эти приборы подразделяются на восемь классов точности, обозначаемых условно цифрами: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Класс точности указывается на шкале прибора, где соответствующая классу точности цифра заключается в кружок, например, (0,5); (1,0) и т.д.

Класс точности определяется максимальной погрешностью, выраженной в процентах от наибольшего значения показаний по шкале прибора. Например, для миллиамперметра с классом точности 1,5 и шкалой, рассчитанной на максимальный ток 200 мА (J_{max} = 200 мА), значение $Q_{осн.}$ равно

$$Q_{осн.}=\pm\frac{200}{100\%}\cdot 1{,}5\% = \pm 3 \text{ мА. Или } Q_{осн.}=\pm 200\cdot 0{,}015 = \pm 3 \text{ мА.}$$

Для показаний этого прибора 30 и 150 мА значения относительной погрешности будут составлять:

$$\frac{\pm 3}{30}\cdot 100\% = \pm 10\%; \qquad \frac{\pm 3}{150}\cdot 100\% = \pm 2\%,$$

т.е. в первом случае значение относительной погрешности существенно больше. Следовательно, для повышения точности результата

измерения необходимо, чтобы отклонение стрелки происходило бы больше, чем наполовину шкалы. Так, если взять миллиамперметр с пределом измерения тока 40 мА (J_{max} = 40 мА) и классом точности тоже 1,5, то значение погрешности понизится: $Q_{осн.}=40\cdot 0{,}015 = 0{,}6$ мА. Для значения тока J = 30 мА относительная погрешность соответственно уменьшается: 0,6/30 = 0,02, т.е. 2%.

Таким образом, систематическую погрешность прибора $Q_{осн.}$ можно снизить не только за счет использования прибора более высокого класса точности (соответственно более дефицитного и дорогого), но и за счет изменения пределов измерения исследуемой величины. На практике поэтому широко используются многопредельные электроизмерительные приборы, возможности которых экспериментатор должен грамотно использовать.

Заметим, что приборы классов 0,1; 0,2; 0,5 применяют для весьма точных лабораторных измерений, они называются <u>прецизионными</u>. В технике используются менее точные приборы классов 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

В систематическую погрешность, наряду с $Q_{осн.}$, входит также погрешность отсчитывания ($Q_{отсч.}$), равная половине цены наименьшего деления шкалы при отсчитывании с точностью до целого деления (отдельные экспериментаторы способны оценивать с точностью до 0,1 деления). Погрешность $Q_{отсч.}$ является систематической погрешностью только при однократном измерении; при многократных измерениях $Q_{отсч.}$ автоматически становится составляющей случайной погрешности, так как в силу случайно действующих факторов результаты измерений могут быть как завышены, так и занижены при отсчитывании показаний со шкал приборов.

Систематические погрешности могут возникнуть из-за несовершенства самого метода измерения. Например, при взвешивании на теле и уравновешивающие его гири будет действовать разная по значению выталкивающая (архимедова) сила со стороны окружающего воздуха, так как объемы исследуемого тела и гирь будут разными. Поэтому при равновесии весов значения масс исследуемого тела и гирь не равны в точности друг другу. При весьма точном взвешивании (на аналитических весах) расхождение значений масс обусловливает погрешность метода ($Q_м$).

Путем расчета выталкивающих сил можно оценить возникающую

систематическую погрешность данного метода определения массы тела. Следует заметить, что не существует единого рецепта для оценки погрешности метода, как впрочем и других составляющих систематической погрешности.

Итак, составляющими систематической погрешности являются: предел основной погрешности средств измерений $Q_{осн.}$ (т.е.погрешность прибора); погрешность отсчитывания $Q_{отсч.}$; погрешность метода $Q_м$; погрешности, обусловленные другими факторами (отклонением температуры, влажности и пр. от заданных значений).
Не касаясь подробностей, отметим, что согласно теории вероятностей при выборе доверительной вероятности 0,95 (α = 0,95) значение границы систематической погрешности Q_x оценивается по формуле:

$$Q_x = 1{,}1\sqrt{Q_{осн}^2 + Q_{отсч.}^2 + Q_м^2} \quad . \qquad (24)$$

7. ОЦЕНКА ГРАНИЦ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Как уже отмечалось, путем многократных измерений случайную погрешность можно свести практически к нулевому значению (в пределах точности измерений данными приборами). Поскольку число измерений ограничено, то соотношение случайной и систематической погрешностей может быть различным. Для сравнения значений систематической и случайной погрешностей в метрологии рассматриваются следующие критерии при сопоставлении между собой значений Q_x и $S_{\langle x\rangle}$.

1. Если имеет место соотношение ($Q_x / S_{\langle x\rangle}$) < 0,8, то пренебрегают систематической погрешностью. Граница полной погрешности принимается равной случайной погрешности: $\Delta_x = \varepsilon_x$, α = 0,95.
2. Если выполняется неравенство ($Q_x / S_{\langle x\rangle}$) > 8, то пренебрегают случайной погрешностью, принимая полную погрешность равной Q_x: $\Delta_x = Q_x$, α = 0,95.

На практике всегда рекомендуется сделать 3-4 пробных замера исследуемой величины. Если результаты этих измерений не отличаются друг от друга, то это и означает, что допускаемая случайная погрешность меньше систематической и поэтому не фиксируется измерительным прибором данного класса точности.

3. В случае выполнения условия $0{,}8 < (Q_x / S_{\langle x\rangle}) < 8{,}0$ необходимо учитывать обе составляющие полной погрешности. Доверительную

границу полной погрешности Δ_x оценивают по формуле, полученной в теории вероятностей:

$$\Delta_x = \sqrt{\varepsilon_x^2 + Q_x^2} \quad . \qquad (25)$$

Окончательный результат прямого измерения записывается в виде:

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta_x \ ,$$
$$\alpha = 0{,}95 \ .$$

8. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть некоторая величина y связана функциональной зависимостью с другими, независимыми друг от друга величинами $X_1, X_2, \ldots X_m$ которые сами измеряются непосредственно:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad . \qquad (26)$$

Каждая из величин измеряется n раз. Если в выражение (26) подставить результаты вначале первого, затем второго, третьего и т.д. измерений, то можно n раз получить значение величины y : y_1, y_2, $y_3 \ldots, y_n$. Эти значения можно затем обработать так же, как результаты прямых измерений по описанной выше методике, вычислив среднее значение $\langle y\rangle$ и погрешность Δ_y

По второму способу можно определить среднее значение для каждой величины $\langle x_1\rangle$, $\langle x_2\rangle, \ldots \langle x_m\rangle$ и, подставив их в соотношение (26), определить наиболее достоверное значение величины y :

$$y = f(\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_m\rangle) \quad . \qquad (27)$$

Как показывают расчеты, оба способа вычисления значения y дают практически одинаковые результаты.
Во втором случае (способе) граница полной погрешности величины y вычисляется по формуле, имеющей в общем случае вид:

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^2} , \qquad (28)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ - частная производная от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

по аргументу x_1; Δx_1 – граница полной погрешности величины X_1 и т.д.

Следует отметить, что вычисление погрешностей косвенного измерения (в особенности систематической и полной) представляет собой сложную задачу. Формула (28) отражает упрощенный вариант методики расчета полной погрешности косвенного измерения, когда число переменных к тому же не превышает двух-трех.

Чаще вычисляют значение относительной погрешности γ, которое можно получить, поделив обе части равенства (28) на значение самой функции y:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{1}{y}\Delta x_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{1}{y}\Delta x_m\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{1}{f}\Delta x_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{1}{y}\Delta x_m\right)^2}. \qquad (29)$$

Поскольку выражение $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{1}{f}$ является частной производной по x_i от функции $\ln f$, то выражение (29) для значения γ запишется кратко в виде:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i}\Delta x_i\right]^2}. \qquad (30)$$

Формулы для относительной погрешности различных функций приведены в приложении 4.

Из соотношения (30) определяется граница абсолютной погрешности результата измерения величины y:

$$\Delta y = \gamma\langle y\rangle \qquad (31)$$

При вычислении значения Δy используется среднее значение величины y. Поэтому в формуле (31) вместо значения y взято значение $\langle y\rangle$.

Поскольку доверительные границы погрешностей величин $X_1, X_2, \ldots X_m$ определяются при значении $\alpha = 0{,}95$, то и для значения границы погрешности Δy надежность α составляет 0,95 ($\alpha = 0{,}95$).

Окончательный результат записывается в виде:

$$y = \langle y\rangle \pm \Delta y, \qquad \alpha = 0{,}95.$$

9. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Определить средние арифметические значения результатов прямых измерений $\langle x_i\rangle$.
2. Вычислить соответствующие средние квадратические отклонения $S_{\langle x_i\rangle}$
3. Установить доверительные границы случайной погрешности результатов прямых измерений $\varepsilon_{\langle x_i\rangle}$.
4. Найти доверительные границы неисключенной систематической погрешности результатов прямых измерений Q_{x_i}.
5. Определить доверительные границы полной погрешности результатов прямых измерений Δx_i.
6. Вычислить относительную погрешность результатов прямых измерений γ_i.
7. Записать результат прямого измерения каждой величины в виде

$$x_i = \langle x_i\rangle \pm \Delta x_i; \quad \gamma_i = \pm\frac{\Delta x_i}{\langle x_i\rangle}; \qquad P = 0{,}95.$$

8. Вычислить наиболее достоверное значение результата косвенного измерения $\langle y\rangle$.
9. Получить выражение для относительной погрешности косвенного измерения γ и найти ее численное значение.
10. Вычислить доверительные границы абсолютной погрешности результата косвенного измерения $\Delta y = \gamma\langle y\rangle$.
11. Записать окончательный результат измерения

$$y = \langle y\rangle \pm \Delta y; \qquad \alpha = 0{,}95.$$

При записи погрешности ее значение следует округлять до одной значащей цифры, как это и было сделано в рассмотренном ранее примере для результата измерения длины тела:

$l = (125{,}57 \pm 0{,}28)$мм. Округляя: $l = (125{,}6 \pm 0{,}3)$мм.

Соответственно и сам результат также округляется до единиц того

разряда, который содержится в погрешности после ее округления. Заметим, что если первая цифра в значении погрешности равна единице, то погрешность округляется до двух значащих цифр. Например, не следует вместо ±0,13 округлять ±0,1, т.к. за счет округления погрешность сразу же возрастает на 30% (0,03 от 0,1 составляет 0,3 или 30%).

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Физика относится к точным наукам не потому, что результаты измерения физических величин абсолютно точны (не содержат погрешностей), а потому, что всегда можно указать границы значений измеряемой величины, иначе, границы неизбежно допускаемых при измерении погрешностей. Чем совершеннее измерительные приборы и сама методика измерений, тем более узкими являются границы допускаемой погрешности.

Количественные соотношения, выражающие содержание физических законов, справедливы в пределах точности результатов измерения физических величин.

Понятно, что допустимы только такие значения погрешностей измеряемых величин, которые не влияют на результат практической деятельности человека, т.е. на слаженную работу машин, механизмов, на весь ход производственного процесса. В разных отраслях техники требуемая точность измерений различная. Так, в часовой промышленности значения относительной погрешности при изготовлении деталей не должны превышать сотых долей процента. При изготовлении полупроводниковых материалов погрешность концентрации добавляемых примесных атомов не должна превосходить 10^{-5} %.

Используемое в учебном лабораторном практикуме оборудование позволяет получать результаты измерений, относительная погрешность которых составляет до 20%.

Приложение I

ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При обработке результатов измерений, являющихся приближенными значениями измеряемых величин, точность вычислений должна быть согласована с точностью результатов самих измерений. Дело в том, что при выполнении различных математических операций конечный результат, тоже выражаемый приближенным числом, может содержать слишком много значащих* цифр, в том числе и десятичных знаков. Это обстоятельство создает ложное представление о большой точности конечного результата, не говоря уже о бесполезности затраты труда и времени на подобные расчеты. В этом случае следует руководствоваться очевидным положением о том, что точность вычислений не может быть выше точности прямых измерений величин, более того, погрешности вычислений должны быть на порядок (т.е. в 10 раз) меньше погрешностей измерений. Короче говоря, следует соблюдать правила действий над приближенными числами, коими являются результаты прямых измерений. Некоторые из этих правил приводятся ниже как практические рекомендации; обоснование их рассматривается в соответствующих курсах по приближенным вычислениям.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в окончательном результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством этих знаков.

   Пример. 1,22 + 5,3 = 6,52. Следует взять 6,5.

2. При умножении и делении приближенных чисел предварительно их округляют так, чтобы каждое из них содержало столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим количеством этих цифр; столько же значащих цифр следует оставить в окончательном результате.

   Пример. 4,725 · 3,4 · 5,1946 = 4,7 · 3,4 · 5,2 = 83

3. При возведении в квадрат и куб в результате следует взять столько же значащих цифр, сколько их содержится в основании

---

* Значащими цифрами называются все цифры, числа, кроме нуля. Нуль считается значащей цифрой, если находится между значащими цифрами (2,032), в конце числа и означает отсутствие единиц соответствующего разряда в числе (2,230). Для числа a = 0,022 нули (0,0) уже не являются значащими цифрами, число a содержит две значащие цифры (2 и 2). К десятичным знакам (цифрам) относятся те цифры, которые расположены справа от запятой десятичной дроби. Так, в числе 1,835 три десятичных знака; точное число содержит неограниченное количество десятичных знаков: 20= 20,0000...

степени. Аналогичное правило следует соблюдать при извлечении корней этих степеней.

Пример. $1{,}54^2 = 2{,}37$; $\sqrt{3{,}45\cdot10^{-6}} = 1{,}86\cdot10^{-3}$.

4. При определении логарифма приближенного числа в мантиссе логарифма следует взять столько значащих цифр, сколько их в самом числе. Наоборот, при определении числа по данному значению десятичного логарифма в числе сохраняется столько значащих цифр, сколько их содержится в мантиссе логарифма.

Пример. $\lg 5{,}3 = 0{,}72$; $\lg 0{,}423 = \bar{1}{,}626$;
$\lg x = 1{,}422$; $x = 26{,}4$.

При вычислении сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий, при этом в промежуточных результатах следует сохранять на одну значащую цифру больше, чем того требует правило (так называемое правило "запасной цифры").

Пример. $\dfrac{(4{,}2 + 22{,}052)\cdot\sqrt{2{,}7}}{6{,}1\cdot3{,}005\cdot10^3}$.

Среди приближенных чисел сомножитель 6,1 имеет наименьшее количество значащих цифр (две). Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр, а в окончательном результате следует сохранить две значащие цифры:

$$\frac{(4{,}2 + 22{,}052)\cdot\sqrt{2{,}7}}{6{,}1\cdot3{,}005\cdot10^3} = \frac{26{,}3\cdot1{,}65}{18{,}3\cdot10^3} = 2{,}38\cdot10^{-3} = 2{,}4\cdot10^{-3}.$$

Приложение 2

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Очень часто экспериментальные данные представляют в виде графиков, отображающих в наглядной форме функциональную зависимость одной физической величины при изменении другой, выполняющей роль аргумента. Так, изменение объема газа при постоянном его давлении характеризуется линейной зависимостью, выражаемой законом Гей-Люссака:

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ), \qquad (32)$$

где V_0 – объем газа при 0°C; α – термический коэффициент расширения газа при постоянном давлении; t°C – температура газа

по шкале Цельсия. Выполняя измерения при разных температурах, будем иметь ряд значений объема газа, которые позволяют построить график зависимости $V(t^\circ)$ в виде прямой линии (рис. 5).

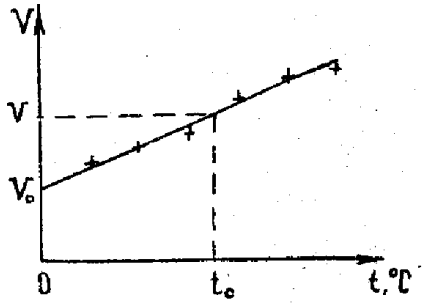


Рис. 5

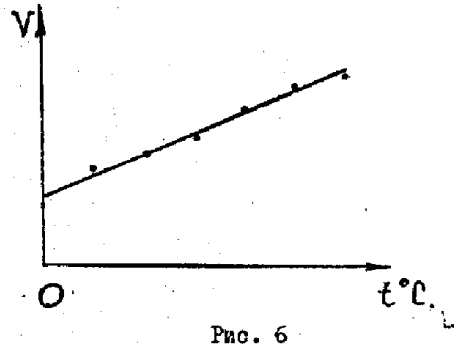


Рис. 6

Экспериментальные данные изображаются геометрическими фигурами (крестиками, кружочками и т.д.), размер которых по данной оси равен удвоенной абсолютной погрешности величины, откладываемой вдоль этой оси (рис. 5). Если же погрешности не определены в момент построения графика, то наносятся точки, соответствующие экспериментальным данным (рис. 6).

Поскольку заранее известно, что функциональная зависимость $V(t^\circ)$ линейна, то график проводится в виде прямой линии так, чтобы по обе стороны ее оказалось приблизительно равное количество точек. Такая прямая наилучшим образом отражает графически функциональную зависимость $V(t^\circ)$.

В других случаях, когда известная зависимость не является линейной, в качестве аргумента выбирается такая величина, чтобы зависимость другой была линейной. Например, при графическом изображении функциональной зависимости пути S равноускоренного движения от времени t ($S = at^2/2$) по оси абсцисс можно откладывать значение квадрата времени t^2. Тогда график зависимости $S(t^2)$ имеет вид прямой линии, которую на глаз провести гораздо проще, чем параболу, соответствующую зависимости S от времени t.

График может быть использован для вычисления какой-либо величины. В нашем случае, используя значения V_0 и V для значения температуры t° (рис. 5), можно вычислить числовое значение α, определяемое из соотношения (32):

$$\alpha = \frac{V - V_0}{V_0 t^\circ} \qquad (33)$$

Значение V_0 определяется при пересечении графика с осью ординат (рис. 5).

Точки, получаемые в разных условиях эксперимента (например, при нагревании и охлаждении тела) полезно отмечать разными значками (крестиками и кружками). Так, на рис. 7 для металлической жидкости изображена графическая зависимость кинематической вязкости ν от температуры при нагревании (Δ) и охлаждении (+).

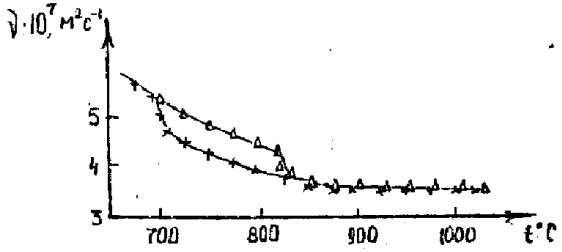


Рис. 7

Различный ход кривых в определенной области температур свидетельствует о разном характере изменения вязкости металлической жидкости при ее нагревании и охлаждении. Правильно проведенные кривые содержат в этом случае важную информацию о разном изменении вязкости в одном и том же интервале температур.

Кривая через точки проводится так, чтобы точки отстояли от нее не далее, чем на допущенную погрешность. Как уже отмечалось, размер значка по соответствующей оси равен удвоенной абсолютной погрешности. Масштаб целесообразно выбирать так, чтобы график был одинаковой протяженности по обеим осям. При использовании миллиметровой бумаги один миллиамперметр обычно соответствует 0,I; 0,2; 0,5; I,0; 2,0; 5,0; I0 единицам измеряемой величины.

Приложение 3

ПРИМЕР ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В качестве примера рассмотрим задачу по определению плотности однородного тела цилиндрической формы.

I. Расчетная формула:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}.$$

II. Средства измерений и их характеристики

Наименование средств измерений	Предел измерений	Цена деления шкалы	Класс точности	Предел основной погрешности
Весы аналитические	200 г	I мг/дел	2	± 2,5 мг
Микрометр	25 мм	0,0I мм/дел	I	± 0,004 мм
Штангенциркуль	I25 мм	0,05 мм/дел	-	± 0,05 мм

III. Результаты измерений

I. Измерение массы образца (тела)

$m = 6I,42I$ г, $\theta_{отс} = 0,5$ мг, $\theta_{осн.} = 2,5$ мг ,

$$\Delta_m = \theta_m = 1,1\sqrt{\theta^2_{осн.} + \theta^2_{отс.}} \qquad \Delta_m = I,I\sqrt{2,5^2 + 0,5^2} =$$

$$\approx 0,0028 \text{ г}. \qquad \gamma = \frac{2,8\cdot 10^{-3}}{6I,42I}\cdot I00\% = 4,6\cdot I0^{-3}\%. \qquad P = 0,95 .$$

Итак, $m = 6I,42I$ г; $\Delta_m = 0,0028$ г; $\gamma = 4,6\cdot I0^{-3}\%$; $P = 0,95$.

.2. Измерение диаметра образца

№ п/п	d, мм	$(d - \langle d\rangle)$, мм	$(d - \langle d\rangle)^2 \cdot 10^4$, мм²
I	I5,2I	- 0,022	4,84
2	I5,26	0,028	7,84
3	I5,23	- 0,002	0,04
4	I5,22	-0,0I2	I,44
5	I5,24	0,008	0,64

$\langle d\rangle = I5,232$ мм, $\qquad \sum (d - \langle d\rangle)^2 = I4,8\cdot I0^{-4}$ мм² ,

$$S_{\langle d\rangle} = \sqrt{\frac{14{,}8\cdot 10^{-4}}{5\,(5-1)}} = 0{,}086 \text{ мм},$$

$$\frac{\theta_d}{S_{\langle d\rangle}} = \frac{0{,}004}{0{,}0086} = 0{,}465 < 0{,}8,$$

т.е. систематической погрешностью можно пренебречь.
Для пяти измерений ($n = 5$) и значении $\alpha = 0{,}95$, $t_{\alpha,n} = 2{,}77$

$$\Delta_d = t_{\alpha,n}\cdot S_{\langle d\rangle} = 2{,}77\cdot 0{,}0086 = 0{,}024 \text{ мм}.$$

$$\gamma = \frac{0{,}024}{15{,}232}\cdot 100\% = 0{,}16\%.$$

Результаты измерения диаметра:

$\langle d\rangle = 15{,}232$ мм, $\Delta_d = 0{,}024$ мм; $\gamma = 0{,}16\%$; $P = 0{,}95$.

3. Измерение высоты образца

№ п/п	h, мм	$(h-\langle h\rangle)$, мм	$(h-\langle h\rangle)^2$, мм²
1	40,15	0,06	0,0036
2	40,05	- 0,04	0,0016
3	40,00	- 0,09	0,0081
4	40,05	- 0,04	0,0016
5	40,20	0,11	0,0121

$\langle h\rangle = 40{,}09$ мм; $\sum (h-\langle h\rangle)^2 = 0{,}0270$ мм²,

$$S_{\langle h\rangle} = \sqrt{\frac{0{,}0270}{5\,(5-1)}} = 0{,}037 \text{ мм}.$$

$$\frac{\theta_h}{S_{\langle h\rangle}} = \frac{0{,}05}{0{,}037} = 1{,}35, \qquad 0{,}8 < 1{,}35 < 8{,}0.$$

В связи с этим учитываются обе составляющие погрешности ε_h и θ_h.
Значение коэффициента Стьюдента определяем для $n = 5$, $\alpha = 0{,}95$:

$t_{\alpha,n} = 2{,}77$; $\varepsilon_h = 2{,}77\cdot 0{,}037 = 0{,}10$ мм,

$$\Delta_h = \sqrt{0{,}10^2 + 0{,}05^2} = 0{,}11 \text{ мм},$$

$$\gamma = \frac{0{,}11}{40{,}09}\cdot 100\% = 0{,}27\%.$$

Результат измерения высоты:

$\langle h\rangle = 40{,}09$ мм; $\Delta_h = 0{,}11$ мм; $\gamma = 0{,}27\%$; $P = 0{,}95$.

IV. Измерение плотности образца (в СИ):

$$\rho = \frac{4\cdot 61{,}421\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot(15{,}232\cdot 10^{-3})^2\cdot 40{,}09\cdot 10^{-3}} = 8{,}412\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Относительная погрешность для ρ вычисляется при использовании частных производных от $\ln\rho$. Для этого предварительно целесообразно прологарифмировать выражение для ρ, что упрощает расчет погрешности.

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial m} = \frac{1}{m}; \quad \frac{\partial \ln\rho}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial \ln\rho}{\partial d} = -\frac{2}{d}; \quad \frac{\partial \ln\rho}{\partial h} = -\frac{1}{h}.$$

Следует отметить, что абсолютная погрешность округленного значения числа берется в зависимости от округления. Так, при округлении числа π будем иметь: $\pi = 3{,}1415927\ldots$, при округлении $\pi = 3{,}14$ $\Delta\pi = 3{,}1415927 - 3{,}14 = 0{,}0016$.
Затем получим формулу для относительной погрешности для величины

$$\gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\Delta m\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\Delta\pi\right)^2 + \left(-\frac{2}{d}\Delta d\right)^2 + \left(-\frac{1}{h}\Delta h\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{0{,}0028}{61{,}4} + \frac{0{,}0016}{3{,}14} + 2\,\frac{0{,}024}{15{,}2} + \frac{0{,}11}{40{,}1}} = 0{,}0042.$$

Или: $\gamma = 0{,}4\%$

После этого можно определить границу абсолютной погрешности для значения ρ (или, проще, абсолютную погрешность ρ).

$\Delta_\rho = \gamma \cdot \rho$ $\quad \Delta_\rho = 0{,}0042 \cdot 8{,}412 \cdot 10^3$ кг/м^3 $= 0{,}03543 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Округляя до одной значащей цифры, будем иметь:

$\Delta_\rho = 0{,}04 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Результат измерения плотности ρ образца:

$\rho = (8{,}41 \pm 0{,}04) \cdot 10^3$ кг/м^3 при $\alpha = 0{,}95$.

Результат измерения ρ округляется до единиц того разряда, с которого начинается абсолютная погрешность.

Заключение. Судя по значению относительной погрешности результата ($\gamma = 0{,}42$), измерение плотности выполнено для учебной лаборатории с достаточно высокой степенью точности. Следует обратить внимание на то, что точность измерения массы существенно больше точности измерения диаметра и высоты образца. Поэтому измерение массы можно было бы выполнять с помощью весов менее точных, чем аналитические. С другой стороны, если точность определения плотности ρ недостаточна, то необходимо повышать точность измерения диаметра и высоты образца. Для этого следует использовать измерительные приборы более высокого класса точности.

Таким образом, проведя измерения имеющимися в наличии измерительными приборами, можно установить, какого класса точности необходимы приборы для измерения физических величин с соответствующей точностью, диктуемой, например, требованиями применяемой технологии.

Приложение 4

Формулы для определения погрешностей функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Вид функции $y = f(x_1, \ldots, x_k)$	Абсолютная погрешность Δy	Относительная погрешность $\tau = \Delta y / y$
$y = x_1 + x_2$	$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{\dfrac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}{x_1 + x_2}}$

$y = x_1 - x_2$	$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{\dfrac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}{x_1 - x_2}}$
$y = x_1 \cdot x_2$	$\sqrt{(x_1 \Delta x_2)^2 + (x_2 \Delta x_1)^2}$	$\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
$y = x^m$	$m x^{m-1} \cdot \Delta x$	$m \dfrac{\Delta x}{x}$
$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$	$\dfrac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} \Delta x$	$\dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\Delta x}{x}$
$y = \dfrac{x_1}{x_2}$	$\dfrac{1}{x_2}\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
$y = \sin x$	$\Delta x \cos x$	$\Delta x \operatorname{ctg} x$
$y = \cos x$	$\Delta x \sin x$	$\Delta x \operatorname{tg} x$

Замечание. В целях упрощения записи угловые скобки для обозначения среднего значения были опущены, т.е. $x_1 = \langle x_1 \rangle$, $x_2 = \langle x_2 \rangle$.

Приложение 5

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha,n}$ для n наблюдений при доверительной вероятности α

n	α					
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
2	1,96	3,08	6,31	12,71	63,7	637
3	1,34	1,89	2,92	4,30	9,92	31,6
4	1,25	1,64	2,35	3,18	5,84	12,9
5	1,19	1,53	2,18	2,77	4,60	8,61
6	1,16	1,48	2,02	2,57	4,03	6,85
7	1,13	1,44	1,94	2,45	3,71	5,96
8	1,12	1,42	1,90	2,36	3,50	5,40

Продолжение прил. 5

9	I,II	I,40	I,86	2,3I	3,36	5,04
I0	I,I0	I,38	I,83	2,26	3,25	4,78
II	I,09	I,37	I,8I	2,23	3,I7	4,59
I2	I,09	I,36	I,80	2,20	3,II	4,49
I3	I,08	I,36	I,78	2,I8	3,06	4,32
I4	I,08	I,35	I,77	2,I6	3,0I	4,22
I5	I,08	I,35	I,76	2,I4	2,98	4,I4
I6	I,07	I,34	I,75	2,I3	2,95	4,07
I7	I,07	I,34	I,75	2,I2	2,92	4,02
I8	I,07	I,33	I,74	2,II	2,90	3,96
I9	I,07	I,33	1,73	2,I0	2,88	3,92
20	I,07	I,33	I,73	2,09	2,86	3,88
I20	I,04	I,30	I,66	I,98	2,62	3,37
∞	I,04	I,28	I,65	I,96	2,58	3,29

Библиографический список

I. Гурский Б.К. Теория вероятностей с элементами математической статистики. М., I97I.
2. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Л., I967.
3. Методы обработки результатов наблюдений при измерениях: Труды метрологических институтов СССР. Вып. I34 (I94). М.;Л., I972.
4. Марков Ю.Н. Математическая обработка результатов измерений / Урал. политех. ин-т. Свердловск, I976.
5. ГОСТ 8.207.76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов измерений. Введ. с 0I.0I.I977.
6. Математическая обработка результатов измерений в лаборатории физического практикума / Урал. политех. ин-т. Свердловск, I983.
7. Петрушевский М.С., Марков Ю.Н. Математическая обработка результатов измерений в лабораториях физического практикума / Свердл. пед. ин-т. Свердловск, I984.

Содержание